Zbigniew Semadeni

Wyższa Szkoła Gospodarki Euroregionalnej
im. Alcide De Gasperi w Józefowie

semadeni@mimuw.edu.pl

DOI: 10.13166/JMS/89778
JOURNAL OF MODERN SCIENCE TOM 2/37/2018, S. 45–68

A comparison of Hejný levels of the development of student's geometric thinking with the van Hiele levels

Porównanie poziomów rozwoju pojęć geometrycznych u uczniów Hejnego z poziomami van Hielów

Abstract

The paper begins with a short description of phenomenological ideas of Petr Vopěnka concerning the development of children's geometric concepts and his notion of *personality of a phenomen*, which makes the phenomenon an individual entity. Milan Hejný's approach to the problem (inspired by Vopěnka's ideas) concerns three levels of understanding the world of geometry by the child: (I) the level of *isolated models* (or *preconceptual*); (II) the level of *personality objects*, where a crucial role in the child's thinking is played by *portraits* of basic shapes, serving as *universal models*; (III) the level of *society objects*. The question of pertinence of the label *preconceptual* is discussed. Then the theory of five levels of the development of geometric thinking, created by Dieke van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele, is analyzed. The levels are: (I) *visual* level (or *recognition* level) – the students' thinking is based on visual (*gestalt*) grasping of the shape (of a square, rectangle etc.), without identifying their properties (e.g., they claim that a square rotated by 45° is not a square, some may use the term *diamond*); (II) *descriptive* level (or *analysis* level) – the student can speak about properties characterizing a shape; (III) *abstraction* level – the student understands that some properties are consequences of other properties; (IV) *deduction* level (from axioms); (V) *rigor* level, formal deduction. The theory is also analyzed in the context of *ontogeny* (the development of geometrical thinking of an individual child) and *phylogeny* (the historical development of geometric concepts, from Tales to 20th century).

Streszczenie

Praca zaczyna się od krótkiego omówienia fenomenologicznych idei Petra Vopěnki dotyczących rozwoju pojęć geometrycznych u dziecka i pojęcia *osobowości zjawiska* – tego, co czyni go samodzielną jednością; wśród nich pojawiają się obiekty takie jak kwadrat i koło. Następnie analizowane są koncepcje Milana Hejnego (inspirowane ideami Vopěnki) dotyczące trzech poziomów rozumienia świata geometrii przez dziecko: I – poziom *modeli izolowanych* (*przedpojęciowy*) i jego cechy; II – poziom *obiektów uosobionych*, w którym myśleniu dziecka istotną rolę odgrywają *portrety* figur geometrycznych jako uniwersalnych modeli; III – poziom *obiektów społecznych*, *idei*. Dyskutowana jest kwestia trafności nazwania poziomu I poziomem przedpojęciowym. Następnie analizowana jest teoria pięciu poziomów rozwoju myślenia geometrycznego u uczniów stworzona przez Dieke van Hiele-Geldof i Pierre'a van Hiele. Są to: I – poziom *wizualny* (poziom *rozpoznawania*), na którym uczeń opiera swe spostrzeżenia dotyczące całościowego, wzrokowego ujmowania kształtu figury (kwadratu, prostokąta), bez zwracania uwagi na to, że mają one pewne własności, np. kwestionuje on fakt, że kwadrat obrócony o 45° jest nadal kwadratem (ewentualnie uczeń uzna go za romb); II – poziom *deskryptywny, opisowy* (zwany też poziomem *analizy*), w którym uczeń potrafi już mówić o kształtach i charakteryzujących je własnościach; III – poziom *abstrakcji*, na którym uczeń rozumie już, że jedne własności wynikają z innych; IV – poziom *dedukcji z* aksjomatów; V – poziom *rygoru* w formalnej dedukcji. Teoria van Hielów analizowana jest też w kontekście związku *ontogenezy* pojęć geometrycznych (w rozwoju indywidualnym dziecka) i ich *filogenezy* – rozwoju historycznego (od Talesa po XX w.).

Keywords: *shapes, Hejný levels, van Hiele levels, visual perception, deduction, preconceptual level, ontogeny vs. phylogeny*

Słowa kluczowe: *kształty, poziomy Hejnego, poziomy van Hielów, percepcja wzrokowa, dedukcja, poziom przedpojęciowy, ontogeneza vs filogeneza*

Wprowadzenie

Źródłem pojęć arytmetycznych u dzieci są pewnego typu *działania* związane z *ruchem*, z takimi czynnościami jak wskazywanie kolejnych obiektów, liczenie itp. Natomiast wiedza geometryczna wywodzi się z *percepcji*, głównie wzrokowej, częściowo też dotykowej, z kinestezji (opartej na czuciu głębokim własnej pozycji oraz świadomości ułożenia części ciała i wykonywanych ruchów, poprzez receptory w mięśniach i stawach), jakkolwiek akcentowane też bywają dynamiczne aspekty rozwoju pojęć geometrycznych u dzieci (Swoboda, 2012b).

W przeciwieństwie do klarownego obrazu wczesnych etapów rozwoju pojęć arytmetycznych u dzieci, jaki wyłonił się z badań prowadzonych we wszystkich niemal krajach, początki kształtowania się pojęć geometrycznych są mniej zbadane, poglądy na ten temat bardziej rozbieżne, a oparte na tym teorie ukazują związane z tym przedmiotem specyficzne trudności badawcze.

Przedmiotem tej pracy są kwestie rozwoju pojęć geometrycznych u uczniów, a w szczególności:

1) opis i krytyczna analiza koncepcji poziomów Milana Hejnego rozumienia świata obiektów geometrycznych przez dziecko, poprzedzona omówieniem idei Petra Vopěnki, które były inspiracją koncepcji Hejnego;
2) opis koncepcji poziomów myślenia geometrycznego opracowanych przez Dinę van Hiele-Geldof i Pierre'a van Hiele i porównanie jej z koncepcją poziomów Hejnego.

Celem niniejszej pracy jest nie tylko omówienie tych koncepcji teoretycznych, ale zarazem rozwinięcie ich i krytyczna analiza. Ważne są one m.in. dlatego, że teoria van Hielów wyraźnie ukazuje potrzebę modyfikacji rozpowszechnionych poglądów dydaktycznych dotyczących wspomagania rozwoju pojęć geometrycznych w edukacji przedszkolnej i nauczania w szkole podstawowej. Wykorzystane zostaną m.in. opracowania Ewy Swobody dotyczącego tego, jak dziecko poznaje świat geometryczny (Swoboda, 2006; Swoboda, 2012a).

W przeciwieństwie do prac Jeana Piageta, których wiele ukazało się w polskim przekładzie i są stosunkowo dobrze przyswojone w polskiej pedagogice, prace Pierre'a van Hiele są słabo znane, a koncepcje Hejnego znane nielicznym.

Koncepcje geometryczne Vopěnki

Analizowane poniżej koncepcje Milana Hejnego inspirowane były ideami filozoficzno-geometrycznymi Vopěnki, które tu są przedstawione w zarysie.

Petr Vopěnka urodził się 16 maja 1935 r. w Pradze, zmarł 20 marca 2015 r. Studiował i działał na Uniwersytecie Karola. Międzynarodowy rozgłos uzyskały jego prace opisujące stworzoną przez niego Alternative Set Theory (AST), alternatywną teorię mnogości. Pewne jej aspekty opublikowane zostały w polskim przekładzie (Vopěnka, 1985), natomiast publikacje geometryczne

Vopěnki ukazały się jedynie w języku czeskim. Zajmował się on też historią matematyki greckiej i arabskiej oraz filozofią matematyki, pozostając pod wyraźnym wpływem fenomenologii Edmunda Husserla. Wcześniej zaś zaangażował się w wydarzenia Praskiej Wiosny 1968, przez co spotykały go rozmaite represje akademickie, trwające aż do aksamitnej rewolucji. Dopiero w 1989 r. mogła się ukazać w Czechach jego matematyczno-filozoficzna książka *Rozpravy s geometrií*. W 1990 r. w postkomunistycznej Czechosłowacji został ministrem edukacji Czech (Wikipedia – Petr Vopěnka).

W swych analizach z filozofii geometrii Vopěnka analizował m.in. przejście od kształtów napotykanych w otaczającej nas rzeczywistości do idealnych figur geometrycznych. Pisał: „Geometra ma przed sobą kartkę papieru pokreśloną liniami o rozmaitym kształcie, prostymi lub krzywymi, wzajemnie przeplatającymi się i krzyżującymi się w różnych punktach. Jego wzrok spoczywa na obrazku, jego spojrzenie przenika jednak cały obrazek, wiodąc od świata realnego do świata geometrycznego. Tak na przykład w prostej kresce widzi on geometryczny odcinek, widzi to w pełnej czystości i razem z nią widzi doskonałą bezpośredniość. W jednej chwili kreska narysowana z pomocą linijki przeobraziła się u niego na zawsze w odcinek geometryczny" (Vopěnka, 1989, s. 16).

Według Vopěnki początkowo w umyśle dziecka nie ma jeszcze żadnych obiektów geometrycznych – jawią się tylko przedmioty rzeczywistego świata. Później dziecko zaczyna dostrzegać coś więcej, może na czymś skupić uwagę, wyróżnić to spomiędzy innych rzeczy, np. koncentruje się na kształcie widzianej rzeczy lub na jakimś specjalnym ułożeniu przedmiotów. To, na czym dziecko skupia uwagę, Vopěnka nazywa *zjawiskiem*, *fenomenem* (czeskie *jev*). Pierwsze ujmowanie takiego zjawiska jest bierne, bodziec wychodzi od fenomenu. Potem niektóre z tych zjawisk zaczynają jakby istnieć samodzielnie, jako pewne jedności, funkcjonujące już bez wsparcia w konkretnym przedmiocie. Vopěnka wprowadza pojęcie *osobowości fenomenu* – to jest to, co czyni go samodzielną jednością. Człowiek może uświadomić sobie taką osobowość, uznać ją. Wśród takich osobowości pojawiają się obiekty geometryczne, np. kwadrat, koło/okrąg, odcinek.

Do tego, aby obiekt stał się osobowością dla dziecka, nie jest konieczne nazwanie go. Nazwę dziecko słyszy od dorosłego, ale ta nazwa nabiera istotnego znaczenia dopiero wtedy, gdy dziecko ma intuicyjną świadomość istnienia tego obiektu. Wtedy też możliwe jest myślenie w terminach *zjawisk stowarzyszonych*, takich jak „prostość" (linii), „przecinanie", „dotykanie", „leżenie między". Zjawiska stowarzyszone, gdy staną się trwałe w umyśle dziecka, nabierają charakteru *własności* cechującej daną figurę lub układ figur. W ten sposób świat geometrii zaczyna się porządkować w umyśle dziecka. Możliwe stają się wtedy wyższe poziomy poznania geometrycznego oparte na wstępnym grupowaniu, na stwierdzaniu podobieństw i różnic w poznanych obiektach (Vopěnka, 1989, s. 17–26; Swoboda 2006, s. 80).

W tym krótkim przeglądzie tych idei Vopěnki, które są najistotniejsze z perspektywy niniejszego opracowania, uderza stwierdzenie, że jego zdaniem ujmowanie zjawisk geometrycznych jest bierne, że bodziec wychodzi od fenomenu. Nasuwa się skojarzenie z podejściem Arystotelesa, który kładł nacisk na to, że *poznanie ludzkie ma charakter bierny*, a wszelka władza umysłu poznającego przedmioty zewnętrzne musi być receptywna, tj. musi poddawać się działaniu tych przedmiotów (Tatarkiewicz, 1958, t. I, s. 140).

Wyraźny jest wpływ fenomenologii Husserla na sposób ujmowania źródeł geometrii u Vopěnki. Husserl wyzwolił się od wpływów kantyzmu, interpretującego poznanie jako czynny akt umysłu, którego podstawą są konstrukcje pojęciowe (Tatarkiewicz, 1958, t. III, s. 303).

Byłoby interesujące rozstrzygnąć, czy idee geometryczne Vopěnki wiodły go, podobnie jak Husserla, w stronę swoistego realizmu platońskiego, wywodzonego ze świadomości, ale nie ze świadomości pojedynczej osoby, lecz jako wytworu procesu intersubiektywnego (Tatarkiewicz, 1958, t. III, s. 309).

Terminu *fenomenologia*, w innym wszakże znaczeniu, użył Hans Freudenthal (1983, s. IX), wyjaśniając, że „fenomenologia matematycznego pojęcia, struktury, idei to opisanie go w odniesieniu do zjawisk, dla których ono powstało" jako *narzędzi* do zrozumienia tych zjawisk. Miało to wpływ na jego interpretację pewnych zachowań uczniów, o której jest mowa dalej.

Opis i analiza poziomów Milana Hejnego

Opisaną tu w zarysie koncepcję rozwoju pojęć geometrycznych u dzieci w wieku 4–15 lat rozwinął matematyk czesko-słowacki Milan Hejný (Hejný, 1993; Hejný, 1995; Hejný, 1997; Edyta Gruszczyk-Kolczyńska i Ewa Zielińska, 1997, s. 125; Swoboda 2006, s. 60, 81; Swoboda, 2012a). Wprawdzie inspiracją tej koncepcji było filozoficzne podejście Vopěnki, ale widoczne są zasadnicze różnice, wynikające z tego, że Hejný wykorzystał też inne idee, wywodzące się z zasadniczo odmiennych postaw filozoficznych: z konstruktywizmu Piageta, z kulturowo-historycznej psychologii Lwa Wygotskiego (1896–1934), z elementów teorii van Hielów, ale zarazem przede wszystkim z wieloletnich obserwacji zachowania dzieci.

Według Hejnego w rozwoju rozumienia świata geometrii przez dziecko można wyodrębnić pewne kolejne poziomy.

I. Poziom **modeli izolowanych** (zwany również *przedpojęciowym*, typowy dla okresu przedszkola i pierwszych lat nauki szkolnej). Jego istotną cechą jest to, że kształty są odbierane przez dziecko jako cechy, *atrybuty* oglądanych przedmiotów. Słowo *kwadrat* w funkcji rzeczownikowej może dlań oznaczać klocek, który nauczyło się rozpoznawać w przedszkolu. Słowa tego może ono też użyć na określenie kształtu oglądanej rzeczy, ale pomimo że gramatycznie słowo *kwadrat* jest rzeczownikiem, dziecko używa go w sensie jakby przymiotnikowym, tak jak np. słów *czerwony*, *długi*. Słowo *kwadrat* oderwane od przedmiotu, do którego się odnosi, nie miałoby dla dziecka sensu.

W tym okresie świat geometrii jest ukryty w świecie rzeczywistym. W jego ujawnianiu się istotną rolę odgrywa intuicja geometryczna. Hejný podaje pięć kryteriów, które pomagają w rozstrzygnięciu, czy dziecko znajduje się na poziomie modeli izolowanych. Oto ich nieco zmodyfikowane sformułowania:

1. Zachowanie i mowa dziecka wskazują na to, że intuicyjnie wyróżnia ono klasę *kształty* jako klasę analogiczną do klas: kolory, smaki, liczby.
2. Dziecko na tym poziomie wiąże każdy ze znanych mu kształtów z obiektami świata realnego (z konkretnymi modelami tych kształtów), np. słowo *koło* wiąże z kołem do zabawy, okrągłym klockiem lub kołem roweru.
3. Dziecko zna słowa takie jak *kwadrat*, *koło*, *trójkąt*, *kostka* (przedmiot w kształcie sześcianu), *kula*, *okrągły*, *prosty*, jednakże zakres znaczeniowy tych słów może być inny od szkolnego (np. trójkątem dla takiego dziecka mogą być jedynie trójkąty o kształcie zbliżonym do równobocznego, ewentualnie też równoramienne z podstawą u dołu). Słowo *prostokąt* odnosi ono jedynie do prostokątów o typowych proporcjach boków, takich jak kartka papieru lub ekran telewizora. Prostokąt zbyt długi nie jest dla

niego prostokątem, lecz określa go np. jako *pasek*. Ważne jest uświadomienie sobie, że na tym poziomie rozwoju kwadrat nie jest dla ucznia prostokątem, bo widzi, że prostokąt wygląda inaczej, a w przedszkolu słowami: *prostokąty, kwadraty* określane były różne klocki. Można oczywiście zmuszać dzieci do powtarzania za nauczycielem, że każdy kwadrat jest prostokątem, ale nie tylko jest to bezcelowe, ale nawet może okazać się szkodliwe. Skoro nie dojrzały one do tego, takie informacje są niezgodne z ich rozumieniem kształtów i mogą przyczyniać się do poczucia, że matematyki nie da się pojąć.

4. Dziecko rozumie sens przymiotników określających cechy wielkościowe (*krótki*, *długi*, *dłuższy*, *najdłuższy* itp.) i umie je stosować.
5. Żaden ze znanych mu kształtów nie jest jeszcze traktowany jako *indywiduum* (w sensie wyjaśnionym poniżej). Charakterystyczną wypowiedzią dziecka patrzącego np. na rysunek kwadratu jest: *to może być okno, a może też być kostka*. Dla takiego dziecka kwadrat sam dla siebie jeszcze nie istnieje, jest jedynie *atrybutem* okna, kafelka i wielu innych rzeczy; kwadrat na rysunku *może być* jakimś przedmiotem, ale taki rysunek jawi się dziecku jako niedokończony. Patrząc na rysunek trójkąta, dziecko nie odbiera go jako figury geometrycznej, raczej powie, że to dach domu, a o wydłużonym trójkącie – że to może być ostry dziób ptaka.

Słońce, moneta, talerz itp. są modelami tego, co ma wspólną nazwę *koło* lub *okrągłe*, są to jednak *modele izolowane*, dziecko nie wiąże ich razem w nową całość (choć słyszy i rozumie słowo *koło* i używa go w takich sytuacjach).

II. Poziom **obiektów uosobionych**. Nazwa ta wywodzi się z terminologii Vopěnki. Na tym poziomie poznający podmiot jest już w stanie wydobyć dane zjawisko geometryczne z widzianych rzeczy i oderwać je od kontekstu, izolując je wizualnie i słownie, przyznając mu pewien status indywidualności. Kwadrat, koło itp. nie są teraz jedynie atrybutami przedmiotów realnych, lecz zaczynają być samodzielnymi obiektami. Dla dziecka w wieku ok. 10 lat takimi **indywiduami** (ang. *personality*), czyli **obiektami uosobionymi** (*personality object*) zazwyczaj są: kwadrat, koło (na ogół nierozróżniane, zwłaszcza na rysunkach, od okręgu), kostka itp. Dziecko dostrzega ten sam kształt w różnych obiektach, np. to, że blat stolika wygląda jak płytka chodnikowa i jak ścianka klocka.

Poziom ten jest bardzo ważny dla rozwoju poznania geometrycznego. Jest to już pewna forma abstrakcji, ujawniająca coś, co wcześniej było poza świadomością podmiotu, a teraz zaczyna mieć samodzielne istnienie. Według Hejnego taka samodzielność figury geometrycznej (niewymagająca już wiązania jej z rzeczywistym przedmiotem) jest wynikiem pewnej aktywności umysłu. Obiekt uosobiony jest identyfikowany ze swym **modelem uniwersalnym** (rysunkiem lub modelem np. z tworzywa), zastępującym uprzednie modele izolowane. Można też powiedzieć, że takie obrazy służą za *prototypy* danej nazwy, np. prototypem kwadratu może być kształt kafelka.

Na poziomie obiektów uosobionych rolę późniejszego, bardziej dojrzałego pojęcia geometrycznego *koło* u dziecka pełni **portret** koła, pewien uniwersalny model, uogólniający znaną mu kolekcję realnych, izolowanych modeli. Idea koła jeszcze nie jest samodzielna (to nastąpi dopiero na następnym poziomie), przejawia się np. w monecie, która ma podwójny status: jest obiektem świata realnego, ale zarazem staje się ogólnym modelem dla pojęcia okręgu. U takiego dziecka rozumienie okręgu znajduje się na poziomie ogólnego portretu koła, któremu odpowiadają kształty różnych konkretnych przedmiotów: talerz, tarcza zegara, słońce, koło roweru, rysunek wykonany za pomocą cyrkla.

Na tym poziomie dziecko potrafi już przypisywać różne stopnie typowości widzianym obiektom, np. jest świadome, że trójkąt może być bardziej typowy (np. równoboczny) lub mniej typowy (np. wydłużony rozwartokątny). Jest też już w stanie określać nazwami pewne relacje między obiektami geometrycznymi, takie jak równoległość czy prostopadłość linii.

Wzorując się na Vopěnce (Vopěnka, 1989), Hejný używa pojęcia, które po angielsku wyraził słowem *attendant*. Według *Webster's New World Dictionary* (1982) słowo to jako przymiotnik znaczy m.in. *being present* (będący obecnym) i *accompanying as a circumstance or result* (towarzyszący jako okoliczność lub wynik), a jako rzeczownik znaczy m.in. *an accompanying thing*, *accompanying circumstance*, czyli rzecz lub okoliczność *towarzysząca*, *współistniejąca*. Słowo *attendant* wywodzi się pośrednio z łacińskiego słowa *attendo*, *attendere*, *attendi*, *attentum* znaczącego: napinam, natężam uwagę, ale dla zrozumienia sensu słowa bardziej trafne jest odniesienie do znaczeń angielskich. Termin *attendant* w sensie użytym przez Hejnego nie daje się bezpośrednio oddać za pomocą jakiegoś polskiego słowa (w grę ewentualnie wchodzi słowo *towarzysz*). Tłumacz artykułu (Hejný, 1997) wprowadził polski neologizm *atendent*, którego będziemy tu używać. To ważne geometryczne pojęcie atendentu objaśnimy na przykładach.

Atendenty dzielą się na *widoczne* i *niewidoczne*. Wierzchołek i bok kwadratu, a także wierzchołek, krawędź i ściana kostki to atendenty widoczne. Wyróżniają się percepcyjnie. Można je wyodrębnić wzrokowo na rysunku, można je wyczuć dotykowo na modelu sześcianu. Natomiast przekątne kwadratu, środek boku i środek kwadratu to atendenty niewidoczne. Mogą istnieć jako wyobrażone w świadomości dziecka dzięki pamięci uprzednio widzianych obiektów lub wykonanych rysunków, np. gdy narysuje się przekątne kwadratu i dziecko ujrzy środek kwadratu jako punkt przecięcia przekątnych, ale może on też pozostać w wyobraźni ucznia atendentem niewidocznym.

Podobnie środek koła jest atendentem niewidocznym, gdy koło przedstawione jest w postaci monety czy talerza. Zarazem środek koła staje się widoczny, gdy cyrklem narysujemy okrąg i zostaje ślad nakłucia. Tak więc pojęcie koła może stać się pewną syntezą dwóch dróg dojścia do niego: *obraz* czegoś okrągłego (moneta, słońce) i *czynność* rysowania cyrklem okręgu. Poznawanie atendentów figur geometrycznych jest ważnym elementem pełniejszego ujmowania tych figur.

III. Poziom **obiektów społecznych**. Jest to już poziom idei (przypominający świat idei platońskich). Do świata idei geometrycznych należą: jedna idea kwadratu (choć kwadratów jest wiele), jedna idea punktu, idea sfery, idea linii prostej. Określony kwadrat ABCD czy określony wierzchołek A danego kwadratu należą jeszcze do świata portretów, do poziomu drugiego. Natomiast jedna idea kwadratu obejmująca wszystkie możliwe kwadraty – to już poziom trzeci.

Z przejściem na wyższy poziom wiąże się większa różnorodność wyodrębnionych kategorii pojęć geometrycznych. Hejný wymienia ich kilka, w tym: *obiekty pojedyncze* (*individual objects*), np. kwadrat, okrąg, sześcian, sfera; *obiekty rodzinne* (*family objects*), np. trójkąt, czworokąt, stożek; *obiekty społeczne* (*society objects*), np. figura wypukła, wielokąt. W tej pierwszej kategorii wszystkie obiekty wyglądają tak samo, różnią się tylko skalą, o ich kształcie decyduje jeden parametr (promień koła, bok sześcianu). W drugiej kategorii nie są już to figury podobne, wyglądają rozmaicie (np. trójkąt rozwartokątny wygląda inaczej niż ostrokątny, a czworokąt wklęsły inaczej niż wypukły), ale są jakby bliżej spokrewnione i percepcyjnie łatwiejsze do wyróżnienia niż figury zaliczone do trzeciej kategorii. Wielokąty, figury wypukłe – to istotnie szersze klasy figur, które mają jednak pewne wspólne własności, dające się opisać i rozpoznać. Inne kategorie to wspomniane wcześniej *atendenty widoczne i niewidoczne*, *relacje* (prostopadłość, symetria, przystawanie itp.), *miary*, *przekształcenia*.

Równolegle z rozwojem pojęć geometrycznych poszerza się zakres dziecięcych umiejętności i aktywności rozmaitego typu. Hejný wyróżnia sześć najważniejszych: *obserwowanie*, *manipulowanie* (rękami na jakimś fizycznym modelu), *badanie* (analizowanie, wnikanie, identyfikowanie atendentów, które może być ukierunkowane na określony cel bądź spontaniczne), *werbalizowanie* (opisywanie słowami sytuacji geometrycznej), *konstruowanie* (rysowanie, rozpinanie gumek na geoplanie), *kreowanie* (tworzenie obiektu jeszcze nieznanego lub nowej sytuacji).

Koncepcja przedpojęciowego etapu rozwoju myślenia

W niniejszym opracowaniu poziom pierwszy w hierachii Hejnego został nazwany *poziomem modeli izolowanych*, choć sam Hejný (1997) używał określenia *poziom przedpojęciowy*, a jedynie wspomniał dalej (Hejný, 1997, s. 18 i 23), że przejście od pierwszego do drugiego poziomu jest podniesieniem abstrakcji z etapu modeli izolowanych na etap modeli uniwersalnych. Ta dwoistość terminologii skłania do analizy samego terminu *przedpojęciowy* (odnoszącego się do poziomu myślenia) i jego zasadności w odniesieniu do opisu koncepcji Hejnego.

Terminu *przedpojęciowy* (*preconceptual*) użył Piaget w swej pracy o zabawach, snach i imitacji z 1951 r., omówionej w książce (Richmond, 1970, s. 20–33). Termin ten dotyczył wczesnego etapu stadium myślenia przedoperacyjnego i obejmował dzieci w wieku ok. 2–4 lat. Piaget opisał ich rozumowanie, wiodące od jednego „przedpojęcia" (*preconcept*) do innego. W późniejszej pracy Piaget (1964/2006, s. 36–37 i s. 99) w podobnym kontekście używał innych terminów, jak: *intuicja*, *zachowanie prelogiczne*, *inteligencja praktyczna*, *wyobrażenie przedoperacyjne*. Porównując opis Piageta poziomu przedpojęciowego i podane przykłady z pierwszym poziomem opisanym przez Hejnego (1997), widać zasadniczą różnicę. Dotyczy ona zarówno wieku dzieci (w przykładzie podanym przez Hejnego dziecko miało 9 lat), jak i typu doświadczanych przez nie trudności. Tak więc nazwa *poziom przedpojęciowy*, jeśli będzie przez czytelnika kojarzona z kontektem piagetowskim, może okazać się myląca.

Odróżnienie myślenia przedpojęciowego od pojęciowego przypisuje się też L.S. Wygotskiemu, jakkolwiek on sam używał innych terminów: *pojęcia potoczne* i *pojęcia naukowe* (Wygotsky, 1971; rozdział *Badanie rozwoju pojęć naukowych w wieku szkolnym*, s. 287–411).

W psychologii aż do lat 70. XX w. bardzo popularne było odróżnianie poziomu (stadium, etapu) myślenia przedpojęciowego od następnego poziomu: myślenia pojęciowego. Było to zarazem wyraźne wartościowanie. Myślenie pojęciowe uznawano za bardziej wartościowe, lepiej rozwinięte, doskonalsze (Bobryk, 2013, s. 133). W poziomie określanym jako *przedpojęciowy* wyróżniano wiele podpoziomów, w zależności od rodzaju struktur powstałych w wyniku indywidualnych doświadczeń dziecka. Między innymi wyróżniano *synkrety* i *kompleksy*. Te pierwsze to dość przypadkowe zlepki wyobrażeń, które były przez podmiot kojarzone i zespoliły się w jeden obraz pomyślanego przedmiotu lub zjawiska. Kompleksy mogą być różnych typów. Stanowią one poziom wyższy od synkretów. Są reprezentacjami konkretnych przedmiotów, które wprawdzie pozostają w obiektywnych relacjach, takich jak sąsiedztwo w czasie lub przestrzeni, podobieństwo funkcjonalne czy jakieś zależności przyczynowo-skutkowe, ale nie stanowią jeszcze pojęcia (Wygotsky, 1971, s. 232–286; Szemińska, 1991/1981, s. 142; Materska, 1978, s. 69 i 73; Swoboda, 2006, s. 30–34).

Tak więc można uznać, że nazwa *poziom przedpojęciowy* dla pierwszego poziomu Hejnego jest w zasadzie zgodna z podanymi tu wyjaśnieniami terminów: *synkret* i *kompleks*. Jednakże wadą jej jest to, że budzi też inne skojarzenia. W przeciwieństwie do niej nazwa *poziom modeli izolowanych* jest jednoznaczna i specyficznie odpowiada koncepcji Hejnego.

Opis i analiza poziomów van Hielów

Teorię zwaną dziś teorią van Hielów przedstawili: nauczycielka gimnazjum Dieke (Dina) van Hiele-Geldof (1911–1958) i jej mąż, nauczyciel liceum, Pierre M. van Hiele (1909–2010) w dwóch oddzielnych dysertacjach doktorskich na Uniwersytecie w Utrechcie w 1957 r. Każdy z tych doktoratów miał dwóch promotorów (Colignatus, 2015); jednym z nich był Hans Freudenthal (1905–1990), drugim Martinus Jan Langeveld (1905–1989). Badania van Hielów były inspirowane teorią Piageta dotyczącą rozwoju pojęć matematycznych u dzieci, ich koncepcje okazały się jednak znacząco różne od piagetowskich.

Obie prace doktorskie zostały przetłumaczone na angielski i są dostępne w systemie ERIC (Fuys i in., 1984). Dieke van Hiele-Geldof prowadziła nowatorskie zajęcia z 12-latkami w szkole Montessori. Niestety zmarła wkrótce po doktoracie. Koncepcję pięciu poziomów, ujmującą kwestie rozwojowe inaczej niż teoria Piageta, opisał Pierre van Hiele w swej pracy doktorskiej i w późniejszych publikacjach (van Hiele, 1986; van Hiele, 2003). Jakkolwiek obie prace doktorskie dotyczyły wyraźnie różnych zagadnień, kwestie te musiały być przez nich wspólnie dyskutowane i jedne badania miały wpływ na drugie. Wkładu obu osób nie da się rozdzielić. Wyniki te rozpropagował Freudenthal, m.in. opisując szczegółowo badania Dieke van Hiele-Geldof (Freudenthal, 1973, s. 407–418).

Bardzo ważne badania nad teorią van Hielów przeprowadził zespół Zalmana Usiskina (1982) w ramach *University of Chicago School Mathematics Project*. Wydali oni też w 1968 r. (w serii *Soviet Studies in Mathematics Education*) książkę A.M. Pyshkalo pt. *Problems in the Formation of Geometric Conceptions in Primary School Children*; ten autor jako pierwszy wprowadził idee van Hielów do nauczania w prowadzonych przez siebie rosyjskich klasach początkowych I–IV. W materiałach UCSMP można spotkać określenie: *The van Hiele-Freudenthal theory of thought levels*.

Teoria ta została opracowana dla pojęć geometrycznych. Nie wiadomo, w jakim stopniu Pierre van Hiele był świadom, że analogiczne poziomy mogą dotyczyć całej matematyki.

Podstawową tezą van Hielów jest to, że to *nie percepcja jest drogą do poznania figur geometrycznych, lecz aktywność dziecka*. W ich teorii istotne są trzy jej aspekty:

- istnienie poziomów kształtowania się myślenia geometrycznego u uczniów,
- własności tych poziomów,
- przechodzenie z jednego poziomu na drugi, które ma charakter stałego następstwa hierarchii.

W opisach tej teorii wyróżnia się zazwyczaj pięć poziomów rozumienia geometrii:

I. poziom ***wizualny*** lub ***wzrokowy*** (ang. *visualization* lub *basic visualization*), zwany też poziomem ***rozpoznawania*** (*recognition*);

II. poziom ***deskryptywny***, zwany też ***opisowym*** bądź poziomem *analizy* (*analysis*) lub poziomem analizy własności (franc. *analyse des propriétés*, Wikipédia – Taxonomie de van Hiele);

III. poziom ***abstrakcji*** (*abstraction*), zwany też *relational level* lub *ordre et hierarchie*;

IV. poziom ***dedukcji*** (*deduction*) z aksjomatów lub *déduction et preuve*;

V. poziom ***rygoru*** (*rigor*).

Poziomy te są opisywane zarówno w terminach ogólnych, jak i przez podanie typowych zachowań badanych uczniów. W przeciwieństwie do teorii Piageta, w której bada się głównie spontaniczny rozwój czynności intelektualnych i kładzie nacisk na wpływ ogólnego rozwoju dziecka (w tym biologicznego) przy przechodzeniu na wyższe poziomy, w teorii van Hielów podkreśla się, że te przejścia w większym stopniu zależą od doświadczeń geometrycznych zebranych przez dziecko i od tego, jak było nauczane, niż od wieku dziecka i jego dojrzewania. Natomiast stwierdzono jej podobieństwo do teorii Wygotskiego (Papademetri-Kachrimani, 2012).

Poziomy teorii van Hielów są numerowane na dwa sposoby: 1–5 lub 0–4, co bywa źródłem nieporozumień, dlatego w opracowaniu tym używane są określenia porządkowe: pierwszy, drugi, …, najwyższy. Niektórzy autorzy trzy górne poziomy (III–V) łączą w jeden: ***poziom logiczny***. Również nazwy poziomów nie są ustalone, spotyka się odmienne określenia u różnych autorów. Poniżej znajduje się syntetyczny opis tych pięciu poziomów, wykorzystujący publikacje: Fuys i in., 1984 (są to tłumaczenia prac doktorskich D. van Hiele i P. van Hiele); Usiskin, 1982; van Hiele, 1986; Mason, 1998; van Hiele, 2003; Swoboda, 2006, s. 84–88; Tall, 2013, s. 60, s. 396; Semadeni, 2015, s. 120–123; Wikipedia – Van Hiele model; Wikipédia – Taxonomie de van Hiele.

Każdy z tych pięciu poziomów ma swoją sieć powiązań między obiektami i swoje specyficzne określenia językowe. Należy pamiętać, że cechy przypisywane temu samemu poziomowi u różnych autorów bywają niezgodne lub wręcz sprzeczne, a także niezgodne z oryginalnym opisem Pierre'a van Hiele'a. W jego publikacjach też odkrywa się paradoksy i trudne do wyjaśnienia niezgodności tekstu (opisuje to Papademetri-Kachrimani, 2012). Na przykład jego książka (van Hiele, 1986, s. 9) zaczyna się stwierdzeniem, że myślenie wymaga użycia słów (*thinking without words is not thinking*), a zarazem w dalszym tekście przekonuje on czytelnika o wielkiej wartości intuicji – myślenia bez słów, twierdząc m.in., że punktem wyjścia wszelkich rozumowań jest wiedza intuicyjna (*all rational thinking begins with intuitive knowledge*).

Ponadto w wielu opublikowanych raportach z badań nad poziomami van Hielów zbyt duży nacisk kładzie się na to, czego uczeń na danym poziomie nie potrafi. Znacznie ważniejsze jest jednak to, co uczeń potrafi i co nieraz pozostaje w cieniu. Część badań, zwłaszcza amerykańskich, nastawiona jest na opracowanie zadań mogących służyć do testowania, na jakim poziomie znajduje się uczeń.

Najniższy jest **poziom wizualny** (**wzrokowy**), zwany też poziomem **rozpoznawania**. Ten drugi termin (używany przez Usiskina, 1982) jest trafny m.in. dlatego, że obejmuje też percepcję dotykową. Jednakże większość badaczy koncentrowała się na aspekcie wzrokowym.

Na tym poziomie dziecko rozpoznaje, porównuje i sortuje kształty geometryczne na podstawie ich percepcji jako całości, przez ich postrzeganie (zazwyczaj wzrokowe) i porównywanie z jakimś prototypem. Typowe słowa: *To wygląda na…* W ten sposób też dziecko o nich myśli; opisuje je tak jak inne przedmioty z życia codziennego. Dominuje myślenie niewerbalne. Dziecko na tym poziomie potrafi mierzyć boki figur. Potrafi też nakładać figury jedne na drugie, ale nie myśli o figurze jako o składającej się ze znanych części (np. o kwadracie jako składającym się z dwóch przystających trójkątów).

Pierre van Hiele twierdził, że gdy uczniom na tym poziomie pokazywano kwadrat, prostokąt, romb i równoległobok, potrafili oni reprodukować ich kształt na geoplanie, ale nie umieli rozpoznać kształtu równoległoboku w rombie (Fuys i in., 1984, s. 249).

Dziecko na poziomie wizualnym nie bierze pod uwagę własności figury, nie zauważa ich bądź nie bierze ich pod uwagę jako coś istotnego. Jego czynności i wyjaśnienia opierają się na całościowych wrażeniach wzrokowych, a nie na analizowaniu ich własności i związanym z tym rozumowaniem. Po prostu: to jest koło, a tamto to kwadrat. Nazwy usłyszane od dorosłych kojarzą z prototypami figur i do tego nawiązują, np. mówią: to jest prostokąt, bo wygląda jak drzwi (lub jak pudełko).

Dla dzieci na tym poziomie kwadrat nie jest bynajmniej prostokątem, wygląda przecież inaczej. Te kształty są odseparowane w umyśle dziecka, podobnie jak romb i równoległobok. Jeżeli widziany kształt nie przypomina w dostateczny sposób prototypu, jest odrzucany przy sortowaniu. Dzieci wahają się lub wręcz sprzeciwiają się, by wydłużony trójkąt (o bokach np. 1, 20, 20 lub 20, 20, 39) nazwać trójkątem, bowiem zbyt bardzo różni się od ich prototypu, jakim jest trójkąt równoboczny. Jeśli pozioma podstawa trójkąta znajduje się u góry, a wierzchołek u dołu, dziecko może stwierdzić, że jest to trójkąt, ale jest „do góry nogami". Może też mieć wątpliwości, czy trójkąt równoramienny narysowany tak, że jedno z ramion jest poziome, można nazwać trójkątem równoramiennym.

Z drugiej jednak strony, na tym poziomie dziecko uzna za trójkąt kształt zaokrąglony lub obrys trójkąta z niekompletnym bokiem, jeżeli całościowo przypomina trójkąt.

Na tym tle interesujący jest fakt, że wielokrotne obrysowanie danego dziecku abstrakcyjnego kształtu (takiego jak litera) nie ma wpływu na jego późniejsze rozpoznawanie (Lowenfeld i Brittain, 1977, s. 33).

Szczególnie ciekawa jest obserwowana przez wielu badaczy (m.in. Pinna, 2015) sytuacja, kiedy to dziecko (a czasem nawet i dorosły) powie o narysowanym kwadracie (lub o kwadratowej płytce) w zwykłym ułożeniu (podstawa pozioma), że to kwadrat, ale gdy ją się obróci o 45°, to mówi, że to już nie jest kwadrat. Świadczy to o tym, że jego prototyp kwadratu ma położenie horyzontalne, a kwadrat obrócony stanowi inny prototyp (bywa to określone słowem *romb*, jeśli dziecko zna tę nazwę). Małgorzata Kalicka stwierdziła, że istotna część badanych przez nią 6-latków i 7-latków mówiła z przekonaniem, że obrócony kwadrat narysowany na kartce nie jest kwadratem i nie pomagało naprowadzanie ich w rozmaity sposób, natomiast u dzieci w wieku 8–9 lat pierwsza odpowiedź: *To nie jest kwadrat* była na ogół korygowana po konfrontacji z innymi sytuacjami. Tym samym dzieciom dano też zadanie polegające na wyciągnięciu trójkąta z torby, bez patrzenia, miały posługiwać się tylko dotykiem. Figury były trójkątami równobocznymi z filcu (przypadek najtrudniejszy, bo były najcieńsze), z cienkiego korka i grubsze z drzewa. Efekty były, ogólnie biorąc, istotnie lepsze niż w przypadku zadania z obróconym kwadratem (Kalicka, 2017).

Na to zjawisko kwestionowania obróconego kwadratu zwróciła też uwagę Adela Jaime (1996, s. 249). Inaczej jednak podszedł do tej kwestii Freudenthal (1983, s. X i s. 245–249). Uznał, że dzieci uczą się, czym są kwadraty, ujmując je jako pewne *obiekty umysłowe* (*mental objects*) i wykorzystując je w swych *aktywnościach umysłowych*. Z tego punktu widzenia kwestia obróconego kwadratu bynajmniej nie jest prosta, bowiem w pewnych sytuacjach fakt, że figura stoi na swoim wierzchołku, może być istotniejszy niż równość boków. Kontynuując jego podejście, można spytać: Czy znak *karo* w kartach do brydża to kwadrat czy romb? Według Wikipedii jest to romb, choć na ilustracji jest tam wyraźny kwadrat obrócony o 45° (Wikipedia – Karo); nazwanie tego znaku kwadratem sugerowałoby znak □.

Oczywiście powyższy opis to ogólny zarys poziomu wizualnego. Różnice między dziećmi bywają ogromne. Zachowują się rozmaicie, a także zmieniają stopniowo swe zachowanie i swoje wypowiedzi pod wpływem nowych zadań i spostrzeżeń. Spotykano też dzieci, które znajdowały się na poziomach przejściowych, a nawet były jakby na kilku różnych poziomach na raz, zależnie od zadań, jakie dostały, i od swych wcześniejszych doświadczeń. Niektóre opierały się jedynie na holistycznym *gestalt* widzianego kształtu, natomiast uwagę innych przyciągała jedna cecha, np. równość boków. Zachowanie wielu dzieci można określić jako synkretyczne.

Na poziomie wizualnym znajdują na ogół dzieci w wieku 6–9 lat, ale wiek i indywidualne różnice zdolności uczniów są tylko jednym z czynników. Kluczowe jest to, jakie były wcześniejsze doświadczenia dziecka i jak się zachowywało przy ich zbieraniu.

Niektórzy autorzy (m.in. Clements i Battista, cyt. za Mason, 1998) proponowali wyodrębnienie poziomu *poprzedzającego opisany tu poziom wizualny*, charakteryzującego się tym, że dziecko rozpoznaje figury jedynie w ograniczonym zakresie, np. odróżnia trójkąty od czworokątów, ale nie jest w stanie rozróżnić koła i elipsy ani rombu i równoległoboku (nie chodzi tu bynajmniej o te trudne nazwy, lecz o niezauważanie różnic między tymi figurami).

Przy czytaniu różnych opisów poziomu wizualnego należy brać pod uwagę to, że część badań (w tym oryginalne badania van Hielów i badania w Chicago) dotyczyła nastolatków w szkole ponadpodstawowej, a inna część badaczy prowadziła je wśród dzieci w wieku 6–8 lat. Starsi uczniowie, nawet zaliczeni formalnie do tego samego poziomu, zachowują się oczywiście inaczej niż dzieci o kilka lat młodsze.

Rewelacyjnym odkryciem van Hielów było to, że wielu uczniów holenderskiego gimnazjum znajdowało się na pierwszym poziomie, kojarzonym w wielu opisach z klasami początkowymi i z wiekiem 6–9 lat. Uczęszczali oni na lekcje prowadzone dedukcyjnie, gdzie twierdzenia wyprowadzono logicznie z aksjomatów. Nic z tego nie rozumieli, ich wiedza mogła być jedynie pamięciowa. Okazało się jednak, że dokonali wielkiego postępu, gdy pod kierunkiem Dieke van Hiele-Geldof zajęli się układaniem deseni z figur. Podstawową motoryczno-zmysłową ideą psychologiczną jej zajęć, silnie oddziałującą na młode umysły, było: układać desenie tak, by figury pasowały jedne do drugich. Dużo trudniejsze były próby wyjaśnienia, dlaczego te figury pasują, czy to się da przewidzieć (Freudenthal, 1973, s. 413).

Drugim z poziomów van Hielów jest **poziom deskryptywny** (**opisowy**), zwany też poziomem **analizy** lub poziomem **analizy własności**. Na tym poziomie uczeń potrafi opisać słowami charakterystyczne własności kwadratu i innych kształtów, rozmawiać o nich, ale nie zawsze zdaje sobie sprawę ze związków między nimi, np. tego, że jedne własności wynikają logicznie z drugich. Nie wie, które z tych własności są koniecznym atrybutem danego kształtu, nie wie też, które własności wystarczają do opisu figury, bo inne już z nich wynikają. Na przykład wie, że kwadrat ma cztery równe boki i cztery równe kąty, wobec tego nie zwiedzie go już obrócenie tej figury. Również w klasie szkic na tablicy i informacja nauczyciela, że boki są równe wystarczy uczniom do wyciągania z tego wniosków. Niektóre dzieci nadal jednak kwestionują fakt, że kwadrat jest prostokątem, dopasowując nawet do tego określenie prostokąta, twierdząc np. że ma cztery równe kąty i jedną parę boków dłuższych od boków drugiej pary.

Pamiętając o ogromnym zróżnicowaniu uczniów, orientacyjnie można przyjąć, że przy należytym nauczaniu, bogatym w geometryczną stymulację (np. układanie mozaik) większość uczniów osiągnie poziom deskryptywny już w wieku 9–12 lat (a więc orientacyjnie – w klasach IV–VI). Niestety szkolne nauczanie geometrii nieraz przyczynia się do opóźnienia rozwoju dzieci: zarówno wtedy, gdy jest zbyt infantylne na początku szkoły, a jeszcze bardziej wtedy, gdy w klasie IV nauczyciel nagle podniesie stopień abstrakcji poza możliwości klasy. Te czynniki powodują, że wielu dorosłych (w tym nawet liczne grono nauczycieli) pozostaje całe życie na poziomie wizualnym, chociaż w szkole średniej uczyli się dość zaawansowanej geometrii.

Trzeci w tej hierarchii jest **poziom abstrakcji**. Teraz już, opierając się na intuicyjnym wnioskowaniu, uczniowie potrafią wykorzystać znane im własności figur do rozwiązania zadań. Są też w stanie zdefiniować figurę, używając tylko minimum niezbędnych cech – bez tych, które z nich łatwo wynikają. Odkrywają nowe własności figur i umieją je uzasadnić, np. znając sposób obliczania pola prostokąta, wiedzą, jak to wykorzystać do znalezienia pola trójkąta. Nie rozumieją jeszcze jednak potrzeby dowodzenia twierdzeń intuicyjnie oczywistych i nie chwytają sensu systemu aksjomatycznego.

Czwarty poziom to **poziom dedukcji z aksjomatów**, taki jak w dawnym nauczaniu licealnym, z dużym udziałem intuicyjnego wnioskowania.

Najwyższy, piąty jest **poziom rygoru** – formalna dedukcja, nieraz przedstawiana na uniwersyteckich studiach matematycznych, z dowodami niepodpartymi intuicyjnym wnioskowaniem; na tym poziomie możliwa jest geometria nieeuklidesowa. Warto dodać, że w określeniu *formalna dedukcja* u dydaktyków matematyki nie stawia się aż tak wysokich wymagań jak przy tym samym określeniu u logików, gdzie dedukcja polega na manipulowaniu symbolami.

Istotną częścią teorii van Hielów jest kwestia przechodzenia z jednego poziomu na drugi. Pierwotną ich tezą było to, że żadnego poziomu uczeń nie może ominąć, że stanowią one hierarchię o stałym następstwie poziomów. Kwestia ta była wielokrotnie badana, pierwotne poglądy były podważane, wiele pytań pozostaje otwartych, ale to już wykracza poza zakres niniejszego opracowania.

Znaczna część badań dotyczących poziomów van Hielów osiąganych przez uczniów jest nastawiona nie tyle na opisywanie tego, jak dzieci wyrażają swe rozumienie kształtów w wyraźnie określonych sytuacjach, lecz na procedurę ewaluacyjną mająca na celu umieszczenie danego ucznia w ustalonej hierarchii (Papademetri-Kachrimani, 2012).

Związek ontogenezy poziomów van Hielów z filogenezą

W XIX w. biolog niemiecki Ernst Haeckel opracował teorię *rekapitulacji*, zwaną też teorią *paralelizmu*, zgodnie z którą rozwój poszczególnych organizmów zwierzęcych (zwany ***ontogenezą***) odtwarza przeszłość ewolucyjną danego gatunku (***filogenezę***), nosi w sobie jej ślady. Lapidarnie określa się to jako zasadę: *ontogeneza naśladuje filogenezę*. We współczesnej biologii koncepcja ta ma jedynie status historyczny, natomiast zainspirowała podobne analizy porównawcze w lingwistyce i w matematyce, śledzące podobieństwa i różnice rozwoju kompetencji i pojęć (językowych bądź matematycznych) u pojedynczego dziecka i w rozwoju historycznym ludzkości.

W dydaktyce matematyki zasada paralelizmu okazała się owocna jako pewne ukierunkowanie myślenia badaczy, głosząc, że proces kształtowania się struktur matematycznych w indywidualnym rozwoju dziecka przypomina skrócone powtórzenie – w ogólnym zarysie – procesu rozwoju wiedzy od czasów prehistorycznych po współczesność (Duda, 1982; Freudenthal, 1985; Semadeni, 2015, s. 30–31). Między innymi takie postawienie sprawy ukazuje dobitnie, że osiągnięcie tego, co dorosłemu może dziś wydać się proste, wymagało kiedyś stuleci, toteż nic dziwnego, że dziecku też idzie to powoli, etapami, musi ono pokonać – na skróty i nieraz inaczej – drogę niezliczonych wcześniejszych pokoleń. Na przykład skoro najwybitniejsi matematycy potrzebowali około 300 lat (od Kartezjusza do Peana w XX w.), aby należycie pojąć i określić pojęcie funkcji, to iluzją jest przekonanie, że uczeń zdoła to należycie zrozumieć po kilku lekcjach w szkole średniej.

Historia matematyki daje bardzo fragmentaryczny obraz tego, jak kształtowały się pojęcia geometryczne u ludzi przed znanym nam okresem Grecji antycznej. Jednym ze źródeł naszej wiedzy jest analiza etymologii podstawowych terminów geometrycznych (w różnych językach). Otóż pouczające jest to, że terminy geometryczne pochodzą zazwyczaj od rzeczowników oznaczających znajome, konkretne obiekty, których kształt kojarzył się z nazywaną figurą (Juszkiewicz, 1975, s. 17). Termin *linia* pochodzi od łacińskiego słowa *linea*, nić z lnu. Termin *punkt* pochodzi od łac. *punctum*, ukłucie. Polskie słowo *środek* pochodzi od *serce* (ongiś było to *serdce*, por. słowo *serduszko*); od tego zaś pochodzi słowo *średnica*. Słowo *oś* pochodzi od *ość*, geometryczny termin *wierzchołek* pochodzi od *wierzch*, a *stożek* to zdrobnienie słowa *stóg*. Inne zaś terminy pochodzą od greckich słów: *sfera* (piłka), *romb* (wirujący bąk), *trapez* (stolik). Terminy geometryczne *koło*, *kula*, *kąt*, *bok* mają zarazem sens w języku codziennym, co bywa źródłem trudności uczniów, przypisujących tym terminom znane im znaczenie pozamatematyczne. W językach zachodnich i w rosyjskim są też inne terminy wywodzące się z greckich, m.in. *conus* (stożek) od greckiego *konos* (szyszka) oraz *piramida* (polskie: *ostrosłup*) ze słowa staroegipskiego. Z przykładami tymi wyraźnie kontrastują podstawowe terminy arytmetyczne: *dodać*, *odjąć*, *mnożyć*, *dzielić*, a także *ułamek*. Wywodzą się one nie od widzianych przedmiotów, lecz od czynności. Wskazuje to wyraźnie na fakt, iż mechanizmy kształtowania się pojęć arytmetycznych i geometrycznych są różne. W sumie jednak nasza wiedza o długiej drodze ludzkości do opisania podstawowych kształtów geometrycznych jest w znacznym stopniu zgodna z tym, co można obserwować u współczesnych dzieci.

Historycy toczą spory o to, jakie twierdzenia geometryczne pochodzą od Talesa, jak mogły być wówczas formułowane i w jakim sensie można mówić o tym, że Tales je udowodnił (Juszkiewicz, 1975, s. 72; Kordos, 2005, s. 51; Matematyka.net, 2017). Z imieniem Talesa uczeni starożytni łączyli pojęcie dowodu twierdzenia, to on miał pierwszy spytać „dlaczego", ale możemy się jedynie domyślać, jak Tales rozumował. Zasadny jest zapewne domysł, że wielkość Talesa polegała na tym, że przeszedł on z poziomu deskryptywnego matematyków egipskich i babilońskich na poziom trzeci van Hielów – poziom abstrakcji.

Porównując opis owych pięciu poziomów z tym, co wiadomo z historii filozofii i historii matematyki, można stwierdzić, że zasługą pitagorejczyków było stopniowe przechodzenie z poziomu trzeciego do czwartego, w którym mistrzem okazał się Euklides. Poziom piąty – rygorystycznych systemów aksjomatycznych – to już dzieło uczonych XIX w. (Murawski, 1995; Kvasz 1998, s. 33–45). Zasada paralelizmu wskazuje na to, aby owe 2200 lat, dzielących w rozwoju historycznym poziom IV dzieła Euklidesa od poziomu V geometrii aksjomatycznej Hilberta i jego następców, uznać za wskazówkę, że skoro przejście to było ongiś tak trudne dla uczonych matematyków, musi też być trudne dla osób uczących się obecnie.

Stosowanie zasady paralelizmu jako ważnej wskazówki do ukierunkowania nauczania matematyki jest wyraźne uwypuklone u Freudenthala. W jego rozumieniu *dydaktyczna fenomenologia* jest sposobem ukazania nauczycielowi miejsc, w których *uczeń mógłby wejść w proces uczenia się ludzkości* (Freudenthal, 1983, s. IX). Później, kończąc w tej książce rozdział *Geometrical contexts*, stara się on określić symptomy wskazujące na możność uchwycenia (*grasp*) geometrycznego kontekstu i umieszczenia tam obiektów, ukazując nauczycielowi, co jest tam istotne, poprzez:

- rozpoznawanie,
- klasyfikowanie,
- odtwarzanie materialne,
- nazywanie,
- reprodukcję umysłową

obiektów umysłowych i procesów oraz poprzez uświadomienie sobie tych aktywności i ich opisywanie (Freudenthal, 1983, s. 248).

Kwestie związane z ontogenezą pojęć geometrycznych i ich filogenezą wchodzą również w zakres współczesnych badań z kognitywistyki matematyki (Hohol, 2018).

Podsumowanie

Porównanie poziomów van Hielów z poziomami Hejnego musi z konieczności opierać się na porównywaniu zachowań dzieci, bowiem opublikowane opisy poziomów są dość ogólne, a użyte określenia są trudno przekładalne z jednych opisów na drugie.

Uderzające jest podobieństwo najniższego poziomu: zachowanie dzieci z poziomu modeli izolowanych w sensie Hejnego jest bardzo podobne do poziomu wizualnego van Hielów.

Na wyższych poziomach sytuacja się komplikuje. Na drugim poziomie (*obiektów uosobionych*) Hejný na plan pierwszy wysuwa fakt, że figury geometryczne stają już dla dziecka samodzielnymi obiektami myślowymi, oderwanymi od zewnętrznego kontekstu, w którym je poznawało. Natomiast w opisie drugiego poziomu van Hielów (*deskryptywnego*, *opisowego*) akcentowane jest to, że na tym poziomie dziecko pojmuje, iż kształty takie jak kwadrat mają pewne specyficzne własności, które je charakteryzują. Poziom deskryptywny wydaje się bardziej zbliżony do poziomu *obiektów społecznych* (trzeciego poziomu u Hejnego), czyli poziomu *idei* (w tym idei obiektów pojedynczych, rodzinnych i społecznych), ale ich opis jest zasadniczo różny.

Literatura

Bobryk, J. (2013). *Labirynty pojęciowe kognitywistyki. Dwa systemy poznawcze czy dwa sposoby działania ludzkiego umysłu?*, „Przegląd Filozoficzny", rok 22, nr 2(86), s. 133–150. http://10.2478/pfns-2013-0053 (dostęp 28.12.2017).

Duda, R. (1982). *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 1, Kraków, s. 127–138. ISSN 0208-8916.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: D. Reidel Publ. Co. ISBN 9789027702357.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: D. Reidel Publ. Co. ISBN 9789027715357.

Freudenthal, H. (1985). *Niejawna filozofia matematyki i dydaktyki matematyki*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 5, s. 7–25. ISSN 0208-8916.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. i Zielińska, E. (1997). *Dziecięca matematyka*, Warszawa: WSiP. ISBN 8302064874.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (red.). (2009). *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji*, Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska. ISBN *9788376350677*.

Hejný, M. (1993). *Understanding of Geometrical Concepts*, Proceedings of the 3rd Bratislava International Symposium on Mathematics Education BISME3, Comenius University Bratislava.

Hejný, M. (1995). *Development of Geometrical Concepts*, Proceedings of International Symposium on Elementary Mathematics Education SEMT '95, s. 13–18.

Hejný, M. (1997). *Rozwój wiedzy matematycznej*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 19, s. 15–28. ISSN 0208-8916.

Hiele, P.M. van (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*, London: Academic Press. ISBN 9780127141619.

Hiele, P.M. van (2003). *Podobieństwa i różnice między teorią uczenia się i nauczania Skempa a poziomami myślenia van Hielego*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 25, s. 183–203. ISSN 0208-8916.

Hohol, M. (2018). *Od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć: W stronę teorii poznania geometrycznego*. W: R. Murawski i J. Woleński (red.), *Problemy filozofii matematyki i informatyki*, Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM, s. 131–145. ISBN 978-83-232-3272-8.

Jaime, A. (1996). *Use of language in elementary geometry by students and textbooks*. W: H. Mansfield i in. (red.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., s. 248–255. ISBN 9780387715759.

Juszkiewicz, A.P. (red.). (1975). *Historia matematyki*, t. I, Warszawa: PWN. ISBN 3788086843155.

Kalicka, M. (2017). *Trudności dzieci w wieku 6–9 lat z rozpoznawaniem figur geometrycznych*, nieopublikowana praca magisterska, Józefów: Wyższa Szkoła Gospodarki Euroregionalnej im. Alcide de Gasperi.

Kordos, M. (2010). *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa: Script. ISBN 9788389716187.

Kvasz, L. (1998). *O revolúciach vo vede a ruptúrach v jazyku vedy*, Bratislava: Univerzita Komenského. ISBN 9783764388393.

Lowenfeld, V. i Brittain, W.L. (1977). *Twórczość a rozwój umysłowy dzieci*, Warszawa: PWN. ISBN 9788373086081.

Mason, M. (1998). *The van Hiele Levels of Geometric Understanding*. W: McDougal Littell (red.), *Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and Applications*, s. 3–8. ISBN 9780395836026.

Materska, M. (1978). *Produktywne i reproduktywne wykorzystywanie wiadomości w różnych fazach uczenia się*, Wrocław: Komitet Nauk Psycholog. PAN, Zakład Ossolińskich.

Murawski, R. (1995). *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa: PWN. ISBN 8301119764.

Papademetri-Kachrimani, Ch. (2012). *Revisiting Van Hiele*, „For the Learning of Mathematics" t. 32, nr 3, s. 1–7. http://flm-journal.org/Articles/4E991671284324-AA83913E989A52FC.pdf (dostęp: 28.12.2017).

Pinna, B. (2015). *Directional organization and shape formation: new illusions and Helmholtz's Square*, „Frontiers in Human Neuroscience", t. 9, s. 92. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4347453/ (dostęp: 4.01.2018).

Richmond, P.G. (1970). *An Introduction to Piaget*, New York: Basic Books.

Semadeni, Z. (2015). *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*. W: Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszczołt, M. Czajkowska, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna*, Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, s. 9–170. ISBN 9788371733093.

Swoboda, E. (2006). *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*, Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego. ISBN 9788373381841.

Swoboda, E. (2012a). *Intuicje i pojęcia geometryczne*. W: E. Gruszczyk-Kolczyńska (red.), *O dzieciach uzdolnionych matematycznie*, *Książka dla rodziców i nauczycieli*, Warszawa: Nowa Era, s. 238–251. ISBN 9788326706134.

Swoboda, E. (2012b). *Dynamic reasoning in elementary geometry*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Seria V, Didactica Mathematicae, t. 34, s. 19–49. ISSN 0208-8916.

Szemińska, A. (1981/1991). *Rozwój pojęć matematycznych u dziecka*. W: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1, wyd. II, Warszawa: WSiP, s. 120–254. ISBN 8302036692.

Tall, D.O. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*, Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 9781107035706.

Tatarkiewicz, W. (1958). Historia filozofii, t. I–III, Warszawa: PWN.

Vopěnka, P. (1989). *Rozpravy s geometrií*, Praha: Panorama. ISBN 9788070380314.

Wygotski, L. (1971). *Wybrane prace psychologiczne*, Warszawa: PWN (wydanie rosyjskie 1960).

Źródła internetowe

Colignatus, Th. (2015). *Pierre van Hiele, David Tall and Hans Freudenthal: Getting the facts right*, arXiv math.HO (History and Overview), https://arxiv.org/abs/1408.1930 (dostęp: 28.12.2017).

Fuys, D. i in. (1984). *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, ERIC Collection, https://eric.ed.gov/?id=ED287697 (dostęp: 29.12.2017).

Matematyka.net (2017). *Polski Portal Matematyczny – Historia matematyki – Tales z Miletu*, http://matematyka.net/index.php/historia-matematyki/poczet-matematykow/tales-z-miletu (dostęp: 19.12.2017).

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School geometry*, Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project, University of Chicago, http://ucsmp.uchicago.edu/resources/van_hiele_levels.pdf, http://ucsmp.uchicago.edu/resources/translations/ (dostęp: 19.12.2017).

Wikipedia – Karo, https://en.wikipedia.org/wiki/Karo (dostęp: 5.01.2018).

Wikipedia – Petr Vopěnka, https://en.wikipedia.org/wiki/Petr_Vop%C4%9Bnka (dostęp: 15.12.2017).

Wikipédia – Taxonomie de van Hiele, https://fr.wikipedia.org/wiki/Taxonomie_de_van_Hiele (dostęp: 5.01.2018).

Wikipedia – Van Hiele model, https://en.wikipedia.org/wiki/Van_Hiele_model (dostęp: 29.12.2017).