JOURNAL OF MODERN SCIENCE
Numer specjalny
Tom 5/54/2023
www.jomswsge.com

DOI: doi.org/10.13166/jms/176175

Agnieszka Surowiec
Lublin University of Technology, Poland
ORCID iD: 0000-0002-7910-2485

Tomasz Warowny
Lublin University of Technology, Poland
ORCID iD: 0000-0002-1500-9812

SPRAWIEDLIWY PODZIAŁ W SENSIE SHAPLEYA – STUDIUM PRZYPADKÓW

FAIR DIVISION IN SHAPLAY SENSE – CASE STUDIES

Abstract

In game theory, when analysing various types of conflicts, it is assumed that decisions are made by an ideal player, i.e., the one who makes full use of the information available to him or her and acts fully rationally. Unfortunately, people do not always behave this way. Very often their decisions are not optimal, so it is very difficult to depict real human behaviour, especially in situations involving the distribution of goods, including money. Two cases will be considered in the paper – the first concerning the sharing of the costs of building a private shared road leading to three properties, the second concerning the division of profits between a company owner and his employees. To address these issues, it was proposed to use the Shapley value, which allows to determine how the construction costs or profits from the company's operations should be divided among the participants of the joint venture in a fair way, taking into account the distance of the property from the main road in the former case and the number of employees in the latter case. In this paper, we would like to present, as recommended by the theory, the way people should behave in the analysed strategic situations and compare it with the applicable norms. The paper may be of an applicational value.

Keywords: *game theory, Shapley value, fair division, n-person games*

Streszczenie

W teorii gier analizując różnego rodzaju konflikty zakłada się, że decyzje podejmuje idealny gracz, tj. taki, który w pełni wykorzystuje dostępne mu informacje i działa w pełni racjonalnie. Niestety, ludzie nie zawsze tak się zachowują. Bardzo często ich decyzje nie są optymalne, dlatego bardzo trudnym jest zobrazowanie rzeczywistych zachowań ludzkich zwłaszcza w sytuacjach dotyczących podziału dóbr w tym także pieniędzy. W pracy zostaną rozważone dwa przypadki – pierwszy dotyczący podziału kosztów budowy prywatnej, wspólnej drogi prowadzącej do trzech posesji, drugi dotyczący podziału zysków pomiędzy właściciela firmy i jego pracowników. Do rozwiązania tych zagadnień zaproponowano wykorzystanie wartości Shapleya, która pozwala określić, jak koszty budowy czy zyski z działalności firmy podzielić pomiędzy uczestników wspólnego przedsięwzięcia w sposób sprawiedliwy, uwzględniający odległość posesji od drogi głównej w przypadku pierwszym oraz wielkość zatrudnienia w przypadku drugim. W niniejszej pracy chcielibyśmy przedstawić, zalecany przez teorię, sposób postępowania ludzi w analizowanych sytuacjach strategicznych. Praca może mieć charakter aplikacyjny.

Słowa kluczowe: *teoria gier, wartość Shapleya, sprawiedliwy podział, gry n-osobowe*

Wprowadzenie

Teoria gier i podstawowe jej terminy takie jak: gra, gracz, strategia, reguły gry, wypłata itp. wywodzą się od gier towarzyskich takich jak szachy czy poker. Za początek teorii gier przyjmuje się rok 1944, kiedy to John von Neumann i Oskar Morgenstern wydali swoją monografię *Theory of Games and Economic Behavior* (*Teoria gier i postępowanie ekonomiczne*) (Neuman, 1944). Rok 1994 był kolejną datą przełomową dla tej teorii. W roku tym trzej matematycy zajmujący się tą teorią i jej zastosowaniami w ekonomii: John Nash, John Harsanyi oraz Reinhard Selten otrzymali nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii. Dziś teoria gier ma szczególne znaczenie w dziedzinie matematyki, ekonomii i nauk społecznych, politycznych i wojskowych, w biologii ewolucyjnej, psychologii społecznej i informatyce (Dianchun, 1997), (Hammerstein, 2015), (Leimar, 2023), (Straffin, 2004), (Kruk, 2021).

Przy pomocy teorii gier można badać sytuacje konfliktowe, ale również sytuacje, w których interesy graczy są zgodne, ale trudno im ustalić jednolity sposób postępowania z powodu braku możliwości komunikacji. Teoria gier pomaga zrozumieć, jak ludzie podejmują wybory w kontekście, w którym ich sukces zależy nie tylko od ich własnych działań, ale także od działań innych, przy założeniu, że wybory wszystkich graczy – uczestników gry są racjonalne. Racjonalna rozgrywka oznacza, że każdy gracz wybierając strategię mającą mu przynieść korzystny wynik uwzględnia prawdopodobne decyzje pozostałych uczestników gry, którzy również dążą do korzystnych dla siebie wypłat postępując w sposób racjonalny. Na bazie abstrakcyjnych modeli matematycznych, teoria gier bada różnorodne scenariusze, od prostych gier dwuosobowych o sumie zerowej, gdzie zysk jednego gracza jest równy stratom drugiego, po złożone interakcje między wieloma uczestnikami opisanymi za pomocą tzw. gier kooperacyjnych, gdzie współpraca prowadzi do wspólnego sukcesu. Zasadnicza różnica między grami dwuosobowymi a wieloosobowymi polega na możliwości tworzenia koalicji. W sytuacji braku możliwości porozumiewania się (tworzenia koalicji) grę wieloosobową można sprowadzić do gry dwuosobowej i rozważać grę jednego gracza przeciw wszystkim pozostałym.

Ważnym pojęciem w teorii gier dwuosobowych jest pojęcie równowagi Nasha, gdzie żaden gracz nie ma motywacji do jednostronnej zmiany strategii

(Nash, 1950). Rozwiązanie gry indywidualnie racjonalne może być nieracjonalne społecznie, a gracze, gdyby mogli porozumiewać się i zawierać wiążące umowy takiego rozwiązania nie zaakceptowaliby. Przykładem takiej gry może być Dylemat Więźnia – gra intensywnie badana w naukach społecznych. Gracze racjonalnie dbający o swoje interesy, doprowadzają do wyniku niekorzystnego dla wszystkich, w tym i dla nich samych (Straffin, 2004). Już Herbert Simon (Simon, 1976), noblista w dziedzinie ekonomii, zwrócił uwagę na istotne przyczyny niezgodności między modelem opartym na racjonalnym postępowaniu a rzeczywistymi wyborami. Po pierwsze, nie mamy pełnej wiedzy na temat konsekwencji podejmowanych decyzji. Po drugie, skutki podejmowanych wyborów z reguły są odroczone w czasie. Nieznane w czasie podejmowania decyzji czynniki mogą wpływać w przyszłości na użyteczność skutków podejmowanych decyzji. Kolejną rzeczą jest brak możliwości rozważenia wszystkich działań, a jedynie brana jest pod uwagę ograniczona liczba strategii.

W przypadku kooperacyjnych gier wieloosobowych, a taką grę będziemy rozważali w niniejszej pracy, istnieje bardzo wiele różnych koncepcji rozwiązania gry, np. rozwiązanie stabilne von Neumanna-Morgensterna, koncepcja rdzenia, wartości Shapleya, koncepcja zbiorów przetargowych Aumanna-Machlera czy inne prowadzących do różnych wypłat (Aumann, 1960), (Aumann, 1964), (Neuman, 1944), (Straffin, 2004).

Tak jak wspomniano wcześniej, teoria gier ma szerokie zastosowania, a mimo to trudno wskazać najwłaściwszy sposób postepowania w każdej życiowej sytuacji konfliktu lub kooperacji. Przyczyny tego są następujące:

- Gry rozgrywane w rzeczywistym świecie są zwykle bardzo skomplikowane – trudno wskazać w nich wszystkich graczy, ich wszystkie możliwe strategie i wyniki, do jakich prowadzą. Trudnością jest także przypisanie poszczególnym wynikom wartości wypłat.
- Teoria gier zakłada, że wszyscy gracze postępują racjonalnie, co niestety nie zawsze w świecie realnym ma miejsce.
- Teoria gier nie potrafi przewidzieć przebiegu gry dwuosobowej, w której interesy obu graczy nie są dokładnie przeciwstawne, ponadto w przypadku gry wieloosobowej istnieje wiele różnych koncepcji prowadzących do różnych rozwiązań.

W niniejszej pracy przedstawiono definicję wartości Shapleya dla kooperacyjnych gier n-osobowych oraz przykłady jej zastosowania (Shapley, 1953), (Malawski, 2008), (Cesari, 2018). Rozważone zostaną przykłady dotyczące podziałów wspólnych kosztów i wypracowanych zysków. Wyznaczony wektor wartości Shapleya w rozważanych przypadkach pokazuje jak podzielić koszty i zyski między graczy, a jak wiadomo problem sprawiedliwego podziału budzi wiele kontrowersji. Również pojęcie *sprawiedliwy* przez różnych ludzi jest różnie rozumiane. Problem sprawiedliwego podziału jest żywy i był omawiany zarówno przez badaczy polskich, w tym Hugona Steinhausa, Stefana Banacha i Bronisława Knastera (Steinhaus, 1948), (Steinhaus, 1949), (Weron, 2006), jak i zagranicznych (Brams, 1996), (Brams, 2000), (Brams, 2014).

Definicja wartości Shapleya

Jedno z rozwiązań sprawiedliwego podziału zostało zaproponowane już w 1953 przez Lloyda Shapleya i od jego nazwiska nazywane jest wartością Shapleya (Shapley, 1953), (Malawski, 2008), (Straffin, 2004), (Hausken, 2020). Jak zauważono (Malawski, 2008) wielu teoretyków uważa, że wartość Shapleya prowadzi w kooperacyjnych grach wieloosobowych do podziału łącznej wypłaty (zyski, koszty) zgodnie ze zdrowym rozsądkiem. Wartość Shapleya dla każdego gracza oznacza jego średni wkład do tzw. wielkiej koalicji, czyli koalicji złożonej ze wszystkich graczy. Można to sobie wyobrazić jako grę kooperacyjną, w której gracze współpracują, aby osiągnąć pewien cel, a wartość Shapleya przypisuje każdemu graczowi *sprawiedliwy* udział w wyniku końcowym na podstawie tego, jak bardzo przyczynił się do osiągnięcia celu, biorąc pod uwagę wszystkie możliwe kombinacje współpracy z innymi graczami.

Niech $G = \langle N, v \rangle$ oznacza grę kooperacyjną, gdzie N to zbiór graczy $N = \{1, 2, n\}$, a v to funkcja nazywana koalicyjną lub charakterystyczną, która przypisuje dowolnemu podzbiorowi (koalicji) $S \subseteq N$ graczy liczbę rzeczywistą: $v \colon 2^N \to R$, przy czym $v(\emptyset) = 0$.

Wektor

$$\varphi(v) = [\varphi_2(v), \varphi_2, \ldots, \varphi_n(v)]$$

nazywamy wartością Shapleya. Zachowuje on następujące własności:
Racjonalność grupowa (efektywność):

1. Suma zysków graczy jest równa zyskowi pełnej koalicji

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

2. Symetria:

$$\left(\bigwedge_{S \subseteq N \setminus \{i,j\}} v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \right) \Rightarrow \varphi_i(v) = \varphi_j(v)$$

Jeśli gracze *i* oraz *j* odgrywają w *v* symetryczne role, to ich wartości Shapleya są również identyczne.

3. Gracz nieistotny:

Jeśli gracz *i* jest graczem nieistotnym, niedodającym wartości żadnej koalicji, to wartość Shapleya dla tego gracza jest równa zero. Ponadto dodanie do gry nieistotnego gracza nie powoduje zmiany wartości Shapleya w tej grze dla żadnego innego gracza *j*.

$$\left(\bigwedge_{S \subseteq N} v(S \cup \{i\}) = v(S) \right) \Rightarrow \varphi_i(v) = 0$$

4. Addytywność:

Jeżeli sprawiedliwym jest, by wartość Shapleya w grze $G_1 = \langle N, v \rangle$ jakiegoś gracza *i* wynosiła $\varphi_i\,(v)$ oraz w grze $G_2 = \langle N, v \rangle$ tego gracza *i* wynosiła $\varphi_i\,(w)$, to sprawiedliwość wymaga, by w grze $G = \langle N, v + w \rangle$ gracz i dostał sumę tych wartości.

$$\bigwedge_{i \subseteq N} \varphi_i(v + w) = \varphi_i(v) + \varphi_i(w).$$

Ponadto zachodzi

$$\bigwedge_{i \subseteq N} \varphi_i(av) = a\varphi_i(v),$$

a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Shapley wykazał, że przy powyższych aksjomatach istnieje tylko jeden taki podział w grze koalicyjnej, a wartości wektora Shapleya można wyliczyć ze wzoru:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} \big(v(S \cup \{i\}) - v(S)\big),$$

gdzie *s* jest liczbą graczy w koalicji *S*.

Przykład 1. Podział kosztów budowy drogi

Podział kosztów budowy drogi prywatnej, z której korzystać ma wielu mieszkańców, może być przedmiotem długich negocjacji między nimi. W przypadku budowy drogi osiedlowej przez władze lokalne, rozwiązanie dotyczące podziału kosztów jest często z góry narzucone. Decyzje dotyczące podziału kosztów budowy drogi osiedlowej zazwyczaj zależą od lokalnych przepisów, standardów i umów społeczności. Oto kilka możliwych podejść do tego zagadnienia:

- Podział równy: Najczęściej koszty budowy drogi osiedlowej są dzielone równo między mieszkańców. Każdy właściciel nieruchomości płaci taką samą kwotę lub procent kosztów, niezależnie od wielkości czy wartości nieruchomości.
- Podział proporcjonalny: Inne podejście polega na proporcjonalnym podziale kosztów, zwykle opartym na wielkości nieruchomości lub innych kryteriach. Właściciele większych działek lub nieruchomości o większej wartości płacą wyższy udział kosztów.
- Opłaty specjalne: Czasami stosuje się opłaty specjalne, które są nakładane na mieszkańców korzystających bezpośrednio z nowej drogi. Chodzi o opłatę adiacencką, tj. opłatę ustaloną w związku ze

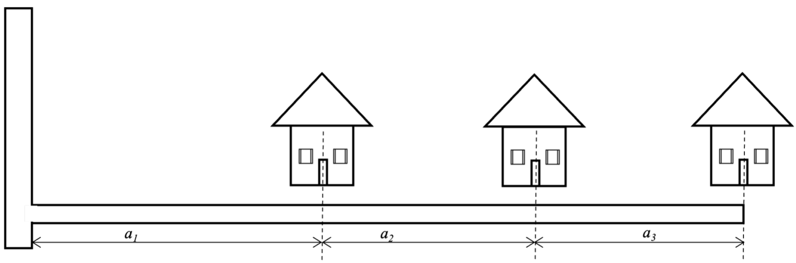
wzrostem wartości nieruchomości spowodowanym budową urządzeń infrastruktury technicznej z udziałem tzw. środków publicznych (np. Skarbu Państwa, jednostek samorządu terytorialnego). Właściciele nieruchomości uczestniczą w kosztach budowy urządzeń infrastruktury technicznej przez wnoszenie na rzecz gminy opłat adiacenckich. Wynika to z **art. 144 ust. 1 ustawy o** gospodarce nieruchomościami (Dz. U. z 2021 r. poz. 1899 ze zm.).

- Opłaty w oparciu o korzyści: Koszty mogą być również rozdzielane na podstawie korzyści, jakie dana nieruchomość uzyska z nowej drogi. To podejście zakłada, że nieruchomości korzystające bardziej, będą ponosiły większe koszty.
- Finansowanie publiczne: W niektórych przypadkach całość lub znaczna część kosztów budowy drogi osiedlowej może być pokrywana z budżetu publicznego, co oznacza, że mieszkańcy nie muszą bezpośrednio płacić za tę infrastrukturę.

Dla właścicieli posesji z prywatną drogą wspólną problemem może być już to czy budować tylko swój odcinek drogi, czy nadal jeździć po nieutwardzonej nawierzchni, czy próbować dojść do porozumienia z sąsiadami, aby wspólnie wykonać inwestycję.

Rozważmy następujący uproszczony problem: Właściciele trzech posesji, których nazwiemy graczami i oznaczymy odpowiednio , , zastanawiają się nad budową drogi do swoich domów. Schemat usytuowania posesji trzech graczy przedstawiono na rysunku 1.

Rys. 1. *Schemat usytuowania posesji trzech graczy.*



Źródło: Opracowanie własne.

Przyjmijmy tutaj, że koszt wybudowania każdego odcinka drogi jest taki sam i wynosi

$$a_1 = a_2 = a_3 = 7$$

jednostek pieniężnych.

Niech wartość funkcji użyteczności dla każdego gracza jest równa:

k_i jest kosztem, jaki musi ponieść gracz G_i, k_i, w tym przypadku może

$$u(G_i) = \begin{cases} 0, & \text{w przypadku, gdy droga nie powtanie,} \\ 100 - k_i, & \text{gdy przynajmniej jeden z graczy wybuduje drogę.} \end{cases}$$

przyjmować wartość *7, 14* lub *21*, w zależności od tego, co zrobili pozostali gracze. Przyjęto liczbę $100 \gg k_i$, aby zaznaczyć wysoką korzyść, jaką odniosą mieszkańcy z wybudowanej drogi. Dodatkowo załóżmy, że droga, jeśli jest budowana, to jest budowana w całości. W takim przypadku można rozważyć grę 2x2x2 o sumie niezerowej przedstawionej w tabeli 1, gdzie strategia *A* oznacza *nie budować drogi*, zaś strategia *B* – *budować drogę*.

Tab. 1. *Wielkości kosztów każdego z graczy.*

G_3 A		G_2	
		A	B
G_1	A	$(0; 0; 0)$	$(100; 79; 100)$
	B	$(79; 100; 100)$	$(89,5; 89,5; 100)$

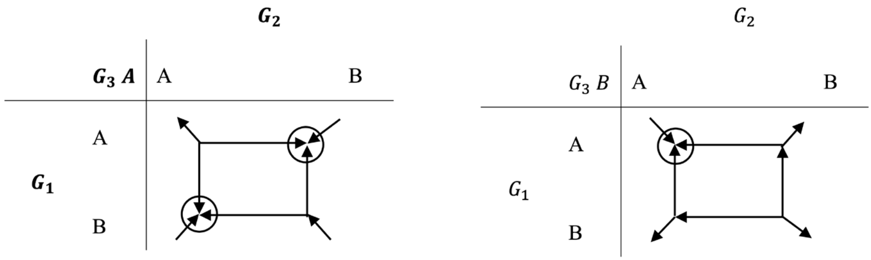
G_3 B		G_2	
		A	B
G_1	A	$(100; 100; 79)$	$(100; 89,5; 89,5)$
	B	$(89,5; 100; 89,5)$	$(93; 93; 93)$

Strategia A oznacza – nie budować; strategia B – budować.

Źródło: Opracowanie własne.

Grze przedstawionej w tabeli 1 odpowiada diagram przesunięć pokazany na rys. 2.

Rys. 2. *Diagram przesunięć dla gry przedstawionej w tab. 1.*



Strategia A oznacza – nie budować; strategia B – budować.

Źródło: Opracowanie własne.

Dla przedstawionej gry strategie będące w równowadze to: *ABA, BAA, AAB* (patrz rys. 2). Oznacza to, że żadnemu z mieszkańców nie opłaca się budować drogi ani samemu, ani wspólnie z pozostałymi, najkorzystniej jest zaczekać, aż zrobią to pozostali – każdy z mieszkańców chciałby zastosować strategię: *poczekam, aż wybudują inni*. Niestety, w ten sposób mogą myśleć wszyscy, co prowadzi do sytuacji najgorszej z możliwych – w efekcie nie ma drogi, a dojazd do posesji jest niemożliwy lub utrudniony. Jak widać z powyższego, skłonienie sąsiadów do współpracy sąsiedzkiej i do wspólnego wybudowania drogi nie jest łatwe, nawet przy założonej z góry, dużej użyteczności wykonanego przedsięwzięcia.

Załóżmy teraz, że problemem jest tylko (albo aż) podział kosztów między trzech właścicieli posesji odpowiednio G_1, G_2, G_3, których domy są usytuowane tak jak przedstawiono na rys. 1, ale teraz przyjęto następujące dane: koszt wybudowania drogi do domu pierwszego gracza G_1 jest równy $a_1 = 10$ jednostek pieniężnych, koszt wybudowania drogi od domu gracza G_1 do domu gracza G_2 jest równy $a_2 = 5$ jednostek pieniężnych, zaś od domu gracza G_2 do domu gracza G_3 jest równy $a_3 = 6$ jednostek pieniężnych. Zakładamy, że wszyscy gracze biorą udział w przedsięwzięciu. Policzymy wektor wartości Shapleya dla każdego z graczy, który pokaże jak właściciele posesji powinni między siebie podzielić koszty budowy drogi.

Intuicja podpowiada, że podział całkowitego kosztu budowy na trzy równe części nie będzie sprawiedliwy. Wydaje się, że racjonalnym byłby następujący podział kosztów pomiędzy trzech graczy:

- z części drogi do posesji gracza G_1 korzystać będą wszyscy, więc powinni podzielić się kosztem jej budowy po 10/3 jednostek pieniężnych;
- z części drogi od posesji gracza G_1 do posesji gracza G_2 będą korzystać gracze G_2 i G_3, więc powinni podzielić się kosztami jej budowy po 5/2 jednostek pieniężnych;
- z części drogi od posesji gracza G_2 do G_3 będzie korzystał tylko gracz G_3 , więc to on powinien ponieść całość kosztów budowy tego odcinka równą 6 jednostek pieniężnych.

Z powyższego otrzymujemy, że łączne koszty budowy graczy będą następujące:
dla : $G_1 : \frac{10}{3}$ jednostek pieniężnych,
dla : $G_2 : \frac{10}{3} + \frac{5}{2}$ jednostek pieniężnych,
dla : $G_1 : \frac{10}{3} + \frac{5}{2} +$jednostek pieniężnych.

Tab. 2. *Wielkości kosztów każdego z graczy i dla każdej koalicji.*

Koalicja\Gracz	G_1	G_2	G_3
$\{G_1, G_2, G_3\}$	10	5	6
$\{G_1, G_3, G_2\}$	10	0	11
$\{G_2, G_1, G_3\}$	0	15	6
$\{G_2, G_3, G_1\}$	0	15	6
$\{G_3, G_1, G_2\}$	0	0	21
$\{G_3, G_2, G_1\}$	0	0	21
Suma wkladów	20	35	71
Średni wkład	$\frac{20}{6}$	$\frac{35}{6}$	$\frac{71}{6}$

Źródło: Opracowanie własne.

Przykładowo wyjaśnimy interpretację wartości z niektórych wierszy tab. 2.

Koalicja $\{G_1, G_2, G_3\}$, że jako pierwszy, potrzebną mu część drogi buduje gracz G_1, czyli musi ponieść koszt 10 jednostek pieniężnych. Gracz G_2, chcąc mieć dojazd do swojej posesji musi przedłużyć drogę o odcinek od posesji gracza G_1 do swojej i ponieść koszty 5 jednostek pieniężnych, następnie gracz G_3 powinien dobudować kolejny odcinek począwszy od posesji G_2 do swojej posesji i ponieść koszt 6 jednostek pieniężnych, zaś np. koalicja $\{G_2, G_3, G_1\}$ oznacza, że najpierw buduje drogę gracz G_2 do swojej posesji ponosząc koszty 15 jednostek pieniężnych, gracz G_3, aby mieć dojazd do swojej posesji musi dopłacić 6 jednostek pieniężnych, a koszty gracza G_1 będą w tym przypadku zerowe, gdyż droga już jest wybudowana. Łatwo zauważyć, że dla koalicji, w których jako pierwszy jest gracz G_3, jego koszty są największe i równe 21 jednostek pieniężnych, a koszty pozostałych graczy są zerowe. Na podstawie danych w tab. 2, wektor wartości Shapleya jest następujący:

$$\varphi(v) = \left[\frac{20}{6}, \frac{35}{6}, \frac{71}{6}\right] = \left[3\frac{1}{3}, 5\frac{5}{6}, 11\frac{5}{6}\right].$$

Jak widać z powyższego, narzucony z góry, równy bądź proporcjonalny podział kosztów mógłby w tym przypadku jedynie satysfakcjonować gracza $\boldsymbol{G_3}$ (($\mathbf{7 < 11\frac{5}{6}}$) oraz ($\mathbf{5 < 11\frac{5}{6}}$)).Wartość Shapleya użyta do określenia, w jaki sposób rozdzielić te koszty między wszystkich właścicieli posesji uwzględnia wkład każdego z nich.

Przykład 2. Dlaczego szef zarabia dużo więcej niż pracownik

Niemal wszyscy zgadzają się z opinią, że właściciele firm, dyrektorzy, prezesi, członkowie zarządów powinni zarabiać więcej niż przeciętni pracownicy ich firm. To oni tworzą miejsca pracy, są odpowiedzialni za codzienne funkcjonowanie firmy, jej rozwój i stabilność. Z drugiej strony, często pojawiają się głosy, że zarobki te są ogromne, co wydaje się być niesprawiedliwe (Chaigneau, 2023), (Gabaix, 2008), (Wilhelm, 1993).

W 2022 roku prezes Banku Milenium zarobił ponad 38 razy więcej niż średnia zarobków pracowników tego banku (https://businessinsider.com.pl). Jak podaje Bankier.pl (https://www.bankier.pl) prezesi spółek z WIG20 za 2021 rok uzyskali wynagrodzenia od kilku do kilkunastu milionów złotych.

Sposób podziału zysku zawsze budził wiele kontrowersji, zwłaszcza u tych najmniej zarabiających. Zobaczmy co na ten temat mówi wartość Shapleya.

Rozważmy sytuację, w której właściciel firmy czy prezes firmy, nazwijmy go szefem i oznaczmy przez S chce zatrudnić pracowników, gdyż sam nie jest w stanie wypracowywać zysków. Załóżmy, że każdy z nowo przyjętych pracowników może wypracować zysk równy jednostek pieniężnych.

Na początku rozważmy sytuację, że szef zatrudnia jednego pracownika P_1. W takim przypadku istnieją trzy niezerowe koalicje z następującymi wartościami funkcji charakterystycznej:

- $v(S) = 0$ – sam szef nie jest w stanie wypracować zysku,
- $v(P_1) = 0$ – sam pracownik nie ma możliwości wypracowania zysku (nie ma miejsca pracy),
- $v(S, P_1) = v(P_1, S) = a$ – szef zapewnia stanowisko pracy pracownikowi umożliwiając mu wypracowanie zysku.

W tabeli pokazano wkład każdego z graczy we wszystkie 2 możliwe koalicje.

Tab. 3. *Wielkości zysków każdego z graczy S i P_1 dla każdej koalicji.*

Koalicja\Gracz	S	P_1
$\{S, P_1\}$	0	a
$\{P_1, S\}$	a	0
Suma wkladów	a	a

Źródło: Opracowanie własne.

Koalicja $\{S, P_1\}$, Poznacza, że na początku w firmie jest tylko szef, który sam nie wytwarza zysku, gdy zatrudnia pracownika P_1 zysk firmy wynosi a. Koalicja $\{P_1, S\}$ oznacza, że na początku w firmie jest tylko pracownik P_1, który sam nie ma możliwości wytwarzania zysku, dopiero gdy zostaje zatrudniony przez szefa przynosi zysk firmie wynoszący a. Wektor wartości Shapleya dla przypadku firmy zatrudniającej jednego pracownika jest następujący:

$$\varphi(v) = \left[\frac{a}{2a}, \frac{a}{2a}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Teraz załóżmy, że szef zatrudnia dwóch pracowników. Tak jak założyliśmy wcześniej, każdy z nich może wypracować zysk równy jednostek pieniężnych. W takim przypadku istnieje 7 niepustych koalicji o następujących wartościach funkcji charakterystycznej:

- $v\ (S) = v\ (P_1) = v\ (P_2) = v\ (P_1,\ P_2) = 0$ – ani sam szef ani sami pracownicy nie są w stanie wypracować zysku,
- $v\ (P_1,\ S) = v\ (P_2,\ S) = a$ – szef zapewnia stanowisko pracy pracownikom umożliwiając każdemu z nich wypracowanie zysku a,
- $v\ (P_1, P_2,\ S) = 2a$ – pracownicy wytwarzają zysk w wielkości $2a$, każdy z nich po a.

Tab. 4. *Wielkości zysków każdego z graczy S, P_1 i P_2, i dla każdej koalicji.*

Koalicja\Gracz	S	P_1	P_1
$\{S,\ P_1, P_2,\}$	0	a	a
$\{S,\ P_2, P_1,\}$	0	a	a
$\{P_1,\ S,\ P_2,\}$	a	0	a
$\{P_1, P_2,\ S\}$	$2a$	0	0
$\{P_2,\ S,\ P_1,\}$	a	a	0
$\{P_2, P_1,\ S,\}$	$2a$	0	0
Suma wkladów	$6a$	$3a$	$3a$

Źródło: Opracowanie własne.

Przykładowo wyjaśnimy interpretację wartości z niektórych wierszy tab. 4. Np. koalicja $\{S,\ P_1, P_2,\}$ oznacza, że na początku w firmie jest tylko szef, który sam nie wytwarza zysku $v\ (S) = 0$. Gdy zatrudni pracownika P_1, da on firmie zysk wynoszący a, bo $v\ (\{S,\ P_1\}) - v\ (\{S\}) = a - 0 = a$. Gdy dodatkowo zostanie zatrudniony pracownik P_2, to mamy $v\ (\{S,\ P_1, P_2,\}) - v\ (\{S,\ P_1\}) = 2a - a = a$. Koalicja oznacza, że najpierw pracownik czeka na zatrudnienie. Nie będąc zatrudnionym (nie ma szefa) nie ma możliwości wypracowania zysku, na zatrudnienie w firmie czeka też pracownik P_1, który również sam nie ma możliwości wypracowania zysku, po zatrudnieniu ich dla szefa mamy: $v\ (\{P_2, P_1,\ S,\}) - v\ (\{P_2, P_1\}) = 2a - 0 = 2a$.

Wektor wartości Shapleya w przypadku firmy zatrudniającej dwóch pracowników jest na podstawie wartości przedstawionych w tab. 4 następujący:

$$\varphi(v) = \left[\frac{6a}{12a}, \frac{3a}{12a}, \frac{3a}{12a}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

Zatem wkład szefa w wypracowany zysk jest równy $\frac{1}{2}$.

Przeanalizujmy teraz przypadek ogólny, czyli przypadek firmy zatrudniającej (***n* – *1***) pracowników. W tym przypadku wszystkich koalicji jest ***n!***. Koalicji postaci {***S, … ,… , …*** } jest (***n* – *1***)***!***. Wkład szefa w każdą z tych koalicji jest równy 0. Koalicji postaci {***… ,S, … , … , …*** } jest (***n* – *1***)***!***. Wkład szefa w każdą z tych koalicji jest równy *a*. Koalicji postaci {***… , … , S, … , … , …*** } jest (***n* – *1***)***!***.Wkład szefa w każdą z tych koalicji jest równy *2a*, …, koalicji postaci {***… ,… , … S***} jest (***n* – *1***)***!***. Wkład szefa w każdą z tych koalicji jest równy (***n* – *1***)***a***. Wartość Shapleya jest równa

$$\boldsymbol{\varphi(v) = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2(n-1)}, \dots, \frac{1}{2(n-1)}\right]}$$

bo dla szefa mamy

$$\boldsymbol{\frac{(n-1)!\,a + (n-1)!\,2a + \ldots + (n-1)!\,(n-1)a}{n!\,(n-1)a} = \frac{(n-1)!\,a(1+2+\ldots+n-1)}{n!\,(n-1)a} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n(n-1)} = \frac{1}{2}}$$

a dla każdego z pracowników z uwagi na własność symetrii mamy $\boldsymbol{\frac{1}{2(n-1)}}$. Z wartości Shapleya otrzymujemy wniosek, że niezależnie od liczby pracowników, przy równym ich wkładzie do wspólnie wypracowanego zysku, przy jego podziale, na szefa zawsze przypada połowa, zaś pracownicy powinni drugą połowę podzielić między siebie po równo. W przypadku zwiększania liczby pracowników powoduje to coraz większe dysproporcje między zarobkami szefa a jego pracownikami.

Wnioski

W tej pracy rozważano gry kooperacyjne ze skończoną liczbą graczy. Zakładano, że gracze nie mają żadnych ograniczeń, co do możliwości tworzenia kooperacji. Należy jednakże pamiętać, że w praktyce takie ograniczenia mogą występować, np. w przypadku budowy drogi takimi ograniczeniami mogą być lokalne przepisy i umowy. Uwzględnienie takich ograniczeń często wymaga zdefiniowania na zbiorze graczy dodatkowej struktury, np. grafu komunikacji czy drzewa hierarchii (Malawski, 2008). Użyta w pracy wartość Shapleya definiuje sposób podziału wypłaty (kosztu, zysku) graczy będących w koalicji. Jest ona jednoznacznie określona dla każdego gracza i reprezentuje jego wkład w łączną wypłatę całej koalicji.

W przykładzie dotyczącym podziału zysków między właściciela firmy i jego pracowników wartość Shapleya reprezentuje podział sprawiedliwy, jednakże sprzeczny ze społecznym poczuciem sprawiedliwości. Chociaż przykład jest wyidealizowany (np. nie uwzględnia konkurencji na rynku) wynik pozwala uzasadnić, dlaczego szef (właściciel firmy, prezes) zarabia nieporównywalnie więcej niż jego pracownicy.

W pracy pokazano, że nawet w bardzo uproszczonej sytuacji możliwe są różne koncepcje podziału, które mogą być sprzeczne ze sobą i z innymi wymaganiami stawianymi metodom podejmowania społecznej decyzji.

Ciekawym i ciągle rozwijającym się kierunkiem w teorii gier jest rozszerzenie wartości Shapleya na nieskończony zbiór graczy. Przypadek ten prowadzi do tzw. gier oceanicznych, o których można przeczytać m. in. w (Jasiński, 2009).

Bibliografia

Aumann, R. J., Maschler, M. (1964), *The Bargaining Set for Cooperative Games*, Advances in Game Theory (Annals of Mathematics Studies, 52) (M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press, 443–476.

Aumann, R. J., Peleg, B. (1960), *Von Neumann–Morgenstern Solutions to Cooperative Games without Side Payments*, Bulletin of the American Mathematical Society, 66, 173–179.

Brams, S. J., Kilgour, D. M., Klamler, C. (2014). *Two-Person Fair Division of Indivisible Items: An Efficient, Envy-Free Algorithm*, Notices of the American Mathematical Society, 61, 130-141.

Brams, S. J., Taylor, A .D. (1996). *Fair Division: From cake-cutting to dispute resolution.* Cambridge University Press, Cambridge.

Brams, S. J., Taylor, A. D. (2000). *The Win-Win Solution. Guaranteeing Fair Shares to Everybody*, W.W. Norton & Company, New York, London.

Cesari, G., Algaba, E., Moretti, S., Nepomuceno, J. A. (2018). *An application of the Shapley value to the analysis of co-expression networks.* Appl Netw Sci 3, 35. https://doi.org/10.1007/s41109-018-0095-y

Chaigneau, P., Edmans A., Gottlieb D., A Theory of Fair CEO Pay, ECGI Working Paper Series in Finance, Paper N° 865/2022, March 2023.

Dianchun, J. (1997). *How's game theory rewrite the micro economics*, Economist, vol. 6, pp. 86-95.

Gabaix, X, Landier, A. (2008). *Why has CEO Pay Increased So Much?* The Quarterly Journal of Economics, vol. 123, Issue 1, 49–100, https://doi.org/10.1162/qjec.2008.123.1.49.

Hammerstein, P., Leimar, O. (2015). *Chapter 11 – Evolutionary Game Theory in Biology*, Editor(s): H. Peyton Young, Shmuel Zamir, Handbook of Game Theory with Economic Applications, Elsevier, Volume 4, 575-617, https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53766-9.00011-2.

Hausken, K. (2020). *The Shapley value of coalitions to other coalitions*. Humanit Soc Sci Commun 7, 104. https://doi.org/10.1057/s41599-020-00586-9.

Jasiński, M. (2009). *Decyzje w dużych grupach – gry oceaniczne w naukach społecznych.* Decyzje, 12, 25-51.

Kruk, M., Artiemjew, P., Paturej, E. (2021) *The application of game theory-based machine learning modelling to assess climate variability effects on the sensitivity of lagoon ecosystem parameters.* Ecological Informatics, Vol. 66, 101462, https://doi.org/10.1016/j.ecoinf.2021.101462.

Leimar, O., McNamara J. M. (2023). *Game theory in biology: 50 years and onwards*. Phil. Trans. R. Soc. B 378:20210509. https://doi.org/10.1098/rstb.2021.0509.

Malawski, M. (2008). *Wartość Shapleya.* Decyzje, 10, 27-58.

Nash, J. F. (1950). *Equilibrium points in n-person games*. Mathematics, vol. 36, 48-49.

Neuman, J. von & Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton.

Shapley, L.S. (1953). *Value for n-person games*. Contributions to the Theory of Games, vol. II, by H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors. Annals of Mathematical Studies v. 28, Princeton University Press, 307–317.

Simon, H.A., (1976). *Działanie administracji: proces podejmowania decyzji w organizacjach administracyjnych.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Steinhaus, H. (1948). *The Problem of Fair Division*, Econometrica 16, 101-104.

Steinhaus, H. (1949). Sur la division pragmatique *Econometrica* 17: 315-319.

Straffin, P.D. (2004). *Teoria gier*. Wydawnictwo Naukowe „Scholar", Warszawa.

Weron, R. (2006). *Hugo Steinhaus: matematyk, humanista i… popularyzator sprawiedliwego podziału tortu.* Decyzje, 6: 113-118.

Wilhelm, P. G. (1993). *Application of Distributive Justice Theory to the CEO Pay Problem: Recommendations for Reform*, Journal of Business Ethics, Vol. 12, No. 6, 469-482.

Dz. U. z 2021 r. poz. 1899 ze zm.

https://businessinsider.com.pl/gielda/wiadomosci/zarobki-prezesow-bankow-lider--zarabia-tyle-ile-38-jego-podwladnych/blebmpd, data dostępu 2023.11.28

https://www.bankier.pl/wiadomosc/Ile-zarabiaja-prezesi-najwiekszych-spolek-8321914.html, data dostępu 2023.11.28.